

MODEL OF ORTHOTROPIC MATERIALS WITH THE FINITE-DIFFERENCE METHOD

HARANGUS Katalin¹

ABSTRACT

THIS PAPER PRESENTS A MATHEMATICAL MODEL WITH FINITE DIFFERENCE METHOD FOR THE INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATES WHICH DESCRIBES THE ONE-DIMENSIONAL DISPLACEMENT OR STRESS OF ORTHOTROPIC MATERIALS.

WE START FROM THE CLASSICAL IDEA OF AIRY STRESS FUNCTION, WHICH DESCRIBES THE SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL OF THE FIELD OF TENSIONS AND WITH THE HELP OF THE TENSIONS AND THE MATERIAL EQUATIONS CAN BE DETERMINED THE SPECIFIC DEFORMATIONS

BY ANALOGY WE DISCOVERED THAT CAN BE USED A "POTENTIAL FUNCTION" OF THE DISPLACEMENT, WHICH MAKES POSSIBLE THE USAGE OF MIXED BOUNDARY CONDITIONS. THE PARTIAL DERIVATIVES OF THIS FUNCTION GIVE THE DISPLACEMENT IN THE DIRECTIONS OF COORDINATE AXES. DISPLACEMENT DERIVATIVES, THE DERIVATIVES OF SUPERIOR ORDER OF THE DISPLACEMENT FUNCTION GIVE SPECIFIC DEFORMATIONS AND USING THE MATERIAL EQUATIONS, THESE SUPERIOR ORDER DERIVATIVES WILL LEAD TO TENSION FIELDS. THEREFORE BECOMES POSSIBLE TO WRITE THE BOUNDARY CONDITIONS AS PRESCRIBED TENSIONS (THE DISTRIBUTED LOAD SHAPE), THERE IS A DIRECT RELATIONSHIP (DIFFERENTIAL EQUATIONS) BETWEEN DISPLACEMENTS AND STRESSES. THESE RELATIONSHIPS ARE APPROXIMATED BY FINITE DIFFERENCES

KEYWORDS: FINITE-DIFFERENCE METHOD; AIRY STRESS FUNCTION; DISPLACEMENT POTENTIAL FUNCTION; ORTHOTROPIC MATERIALS.

1. Einleitung

Bei Anforderungen durch elastische Hauptrichtungen, die Korrelation zwischen Normal und Schubspannungen, bzw. zwischen die linearen und winkligen Verformungen, werden durch die verallgemeinerte Hookesche Gesetz gegeben².

¹ Doktorand, Universität „Transilvania“ von Braşov, Fakultät für Maschienenbau, email: katalin@ms.sapientia.ro (PhD student, "Transilvania" University of Brasov, Faculty of Mechanical Engineering)

Wenn die Verformungen nur in eine Ebene der Koordinaten auftreten, sprechen wir von einer Ebene strain-Verformung. In Anbetracht dieses Planes, der Plan von xy Koordinaten ist, wir haben in senkrechter Richtung, d. h. in Richtung von z folgendes: $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$ und $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$, wir haben die Beziehung³:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x \cdot (1 - \mu_{yz} \cdot \mu_{zy})}{\delta} & \frac{E_x \cdot (\mu_{yx} + \mu_{zx} \cdot \mu_{yz})}{\delta} & 0 \\ \frac{E_y \cdot (\mu_{xy} + \mu_{xz} \cdot \mu_{zy})}{\delta} & \frac{E_y \cdot (1 - \mu_{xz} \cdot \mu_{zx})}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (1)$$

Wenn die Spannungen nur in einer Ebene der Koordinaten auftreten, sprechen wir von einem ebenen Spannungszustand. Nehmen wir an, dass dieser Plan, der Plan von xy Koordinaten ist, dann sind die Spannungen in die Richtung z gleich mit Null: $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ und $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, wir haben die Beziehung⁴:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \mu_{xy} \cdot \mu_{yx}} & \frac{\mu_{xy} \cdot E_y}{1 - \mu_{xy} \cdot \mu_{yx}} & 0 \\ \frac{\mu_{yx} \cdot E_x}{1 - \mu_{xy} \cdot \mu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \mu_{xy} \cdot \mu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \cdot \{\varepsilon\}. \quad (2)$$

Die zwei Elastizitätsmatrizen $[E]$ sind nur dann gültig, wenn die Richtungen der Orthotropen mit den Richtungen der Koordinatenachsen übereinstimmen. Sonst müssen beide Matrizen in Richtung der Orthotropen mit dem passenden Winkel gedreht. Als Folge der Änderung bekommen wir eine volle Matrix

$$[E] = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

² Ioan Curtu and Nicolae Ghelmeziu, *Mecanica lemnului și materialelor pe bază de lemn* (București: Editura Tehnică, 1984), 19.

³ András Kakucs, *A véges-elem módszer alapjai* (Cluj-Napoca: Editura Scientia, 2007), 70.

⁴ András Kakucs, *Végeselem módszer a szerkezetek számításában* (Brașov: Editura Transilvania, 2007), 36.

dessen Komponenten sich folgend gliedern:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{11} &= E_{11} \cdot \cos^4 \theta + E_{22} \cdot \sin^4 \theta + (E_{12} + E_{21} + 4 \cdot E_{33}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta, \\
\bar{E}_{12} &= E_{12} \cdot \cos^4 \theta + E_{21} \cdot \sin^4 \theta + (E_{11} + E_{22} - 4 \cdot E_{33}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta, \\
\bar{E}_{13} &= (E_{11} - E_{12} - 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta + (E_{21} - E_{22} + 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta, \\
\bar{E}_{21} &= E_{12} \cdot \sin^4 \theta + E_{21} \cdot \cos^4 \theta + (E_{11} + E_{22} - 4 \cdot E_{33}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta, \\
\bar{E}_{22} &= E_{11} \cdot \sin^4 \theta + E_{22} \cdot \cos^4 \theta + (E_{21} + E_{12} + 4 \cdot E_{33}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta, \\
\bar{E}_{23} &= (E_{11} - E_{12} - 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + (E_{21} - E_{22} + 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta, \\
\bar{E}_{31} &= (E_{11} - E_{21} - 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta + (E_{12} - E_{22} + 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta, \\
\bar{E}_{32} &= (E_{11} - E_{21} - 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + (E_{12} - E_{22} + 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta, \\
\bar{E}_{33} &= (E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22} - 2 \cdot E_{33}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + E_{33} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),
\end{aligned} \tag{4}$$

wo die

$$[\mathbf{E}_{12}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

die Elastizitätsmatrize ist, gegeben durch die Richtung der Orthotropen. (diese hat nur drei unabhängige Elemente). Wenn die Richtungen der Orthotropen nicht mit die Richtungen der Achsen übereinstimmen, als Folge haben wir eine symmetrische Elastizitätsmatrix mit neun Elementen die nicht Null sind.

In fälle von plane Anisotropie, die Elastizitätsmatrix ist immer noch voll und symmetrisch, aber er beinhaltet nur sechs unabhängige Elemente.

2. Formulierung der Aufgabe durch die Finite-Differenzen-Methode

Ausgehend von der Airy'schen Spannungsfunktion, nehmen wir an, dass in Falle von orthotrope Materialien eine $\Psi(x, y)$ Funktion existiert, dessen partiellen Ableitungen die Bewegung folgendermaßen projizieren⁵:

$$u = \alpha_1 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \alpha_2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \cdot \partial y} + \alpha_3 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad v = \alpha_4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \alpha_5 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \cdot \partial y} + \alpha_6 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \tag{6}$$

⁵ S.R. Ahmed et al., „A general mathematical formulation for finite-difference solution of mixed-boundary-value problems of anisotropic materials“, Computer and Structures 83 (2005): 35-51.

indem die folgende Gleichung der Kompatibilität erfüllen⁶:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = 0. \quad (7)$$

Wir schreiben die Gleichgewichtsgleichung um

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + f_y = 0, \quad (8)$$

durch die Hookesche Gesetz, im spezifische Verformungen (wir betrachten $f_x = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(E_{11} \cdot \varepsilon_x + E_{12} \cdot \varepsilon_y + E_{13} \cdot \gamma_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(E_{31} \cdot \varepsilon_x + E_{32} \cdot \varepsilon_y + E_{33} \cdot \gamma_{xy})}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(E_{21} \cdot \varepsilon_x + E_{22} \cdot \varepsilon_y + E_{23} \cdot \gamma_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(E_{31} \cdot \varepsilon_x + E_{32} \cdot \varepsilon_y + E_{33} \cdot \gamma_{xy})}{\partial x} + f_y &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

und dann mit die geometrische Gleichungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (10)$$

durch die Verwendung der Verhältnisse von Punkt (6) wir bekommen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 \cdot E_{11} + \alpha_4 \cdot E_{13}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + \\ &+(\alpha_1 \cdot E_{13} + \alpha_1 \cdot E_{31} + \alpha_2 \cdot E_{11} + \alpha_4 \cdot E_{12} + \alpha_4 \cdot E_{33} + \alpha_5 \cdot E_{13}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^3 \cdot \partial y} + \\ &+(\alpha_1 \cdot E_{33} + \alpha_2 \cdot E_{13} + \alpha_2 \cdot E_{31} + \alpha_3 \cdot E_{11} + \alpha_4 \cdot E_{32} + \alpha_5 \cdot E_{12} + \alpha_5 \cdot E_{33} + \alpha_6 \cdot E_{13}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \\ &+(\alpha_2 \cdot E_{33} + \alpha_3 \cdot E_{13} + \alpha_3 \cdot E_{31} + \alpha_5 \cdot E_{32} + \alpha_6 \cdot E_{12} + \alpha_6 \cdot E_{33}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x \cdot \partial y^3} + \\ &+(\alpha_3 \cdot E_{33} + \alpha_6 \cdot E_{32}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

⁶ Popa Mazilu et al., Teoria și calculul plăcilor ortotrope (București: Editura Tehnică, 1983), 454-459

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 \cdot E_{31} + \alpha_4 \cdot E_{33}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + \\
& + (\alpha_1 \cdot E_{21} + \alpha_1 \cdot E_{33} + \alpha_2 \cdot E_{31} + \alpha_4 \cdot E_{23} + \alpha_4 \cdot E_{32} + \alpha_5 \cdot E_{33}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^3 \cdot \partial y} + \\
& + (\alpha_1 \cdot E_{23} + \alpha_2 \cdot E_{21} + \alpha_2 \cdot E_{33} + \alpha_3 \cdot E_{31} + \alpha_4 \cdot E_{22} + \alpha_5 \cdot E_{23} + \alpha_5 \cdot E_{32} + \alpha_6 \cdot E_{33}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \quad (12) \\
& + (\alpha_2 \cdot E_{23} + \alpha_3 \cdot E_{21} + \alpha_3 \cdot E_{33} + \alpha_5 \cdot E_{22} + \alpha_6 \cdot E_{23} + \alpha_6 \cdot E_{32}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x \cdot \partial y^3} + \\
& + (\alpha_3 \cdot E_{23} + \alpha_6 \cdot E_{22}) \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + f_y = 0.
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung, die Koeffizienten α werden so bestimmt, dass die Multiplikatoren der partiellen Ableitungen mit Null gleich sein sollen.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot E_{11} + \alpha_4 \cdot E_{13} &= 0 \\
\alpha_1 \cdot E_{13} + \alpha_1 \cdot E_{31} + \alpha_2 \cdot E_{11} + \alpha_4 \cdot E_{12} + \alpha_4 \cdot E_{33} + \alpha_5 \cdot E_{13} &= 0 \\
\alpha_1 \cdot E_{33} + \alpha_2 \cdot E_{13} + \alpha_2 \cdot E_{31} + \alpha_3 \cdot E_{11} + \alpha_4 \cdot E_{32} + \alpha_5 \cdot E_{12} + \alpha_5 \cdot E_{33} + \alpha_6 \cdot E_{13} &= 0 \quad (13) \\
\alpha_2 \cdot E_{33} + \alpha_3 \cdot E_{13} + \alpha_3 \cdot E_{31} + \alpha_5 \cdot E_{32} + \alpha_6 \cdot E_{12} + \alpha_6 \cdot E_{33} &= 0 \\
\alpha_3 \cdot E_{33} + \alpha_6 \cdot E_{32} &= 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen fünf Gleichungen ist es nicht möglich sechs Koeffizienten zu bestimmen und soll deswegen eine der Werte vorgeschrieben werden. Als folge, wir weisen $\alpha_2 = 1$ zu und die restliche fünf Koeffizienten werden durch die Lösung der Gleichungssystem (13) erfahren, durch numerischen Methoden.

Durch diese Verfahren erhaltene α Koeffizient, die zweite Gleichgewichtsgleichung wird sich folgendermaßen ändern:

$$\beta_1 \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + \beta_2 \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^3 \cdot \partial y} + \beta_3 \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \beta_4 \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x \cdot \partial y^3} + \beta_5 \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = \beta_0 \cdot f_y, \quad (14)$$

dessen Lösung, die von uns gesuchte potentielle Funktion ist. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind die folgende:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \alpha_1 \cdot E_{31} + \alpha_4 \cdot E_{33}, \\
 \beta_2 &= \alpha_1 \cdot (E_{21} + E_{33}) + \alpha_2 \cdot E_{31} + \alpha_4 \cdot (E_{23} + E_{32}) + \alpha_5 \cdot E_{33}, \\
 \beta_3 &= \alpha_1 \cdot E_{23} + \alpha_2 \cdot (E_{21} + E_{33}) + \alpha_3 \cdot E_{31} + \alpha_4 \cdot E_{22} + \alpha_5 \cdot (E_{23} + E_{32}) + \alpha_6 \cdot E_{33}, \\
 \beta_4 &= \alpha_2 \cdot E_{23} + \alpha_3 \cdot (E_{21} + E_{33}) + \alpha_5 \cdot E_{22} + \alpha_6 \cdot (E_{23} + E_{32}), \\
 \beta_5 &= \alpha_3 \cdot E_{23} + \alpha_6 \cdot E_{22}, \\
 \beta_0 &= -1.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Falls sich die Richtungen der Orthotropen mit die x und y Achsen überlappen, werden die ausdrücke der β_i Koeffizienten vereinfacht und dadurch wird die Lösung der Gleichung einfacher. Weiterhin, wenn die θ Winkel eine ganzzahlige Vielfache der Rechter ist, dann werden die Koeffizienten β_2 und β_4 mit Null gleich sein.

Schließlich, unser Aufgabe reduziert sich zu die Lösung der Gleichung (14): es wird vorgeschlagen, das die Problematik durch die Finite-Differenzen gelöst werden soll. Wenn die partiellen Ableitungen aus der Gleichung mit zentrierten Finite-Differenzen ersetzt werden, dann kommen wir zu der Molekülberechnung aus der Abbildung Nr.1. Als folge, in die Punktkoordinate von (x, y) , (welche die (i, j) Punkt aus der Netzwerk für Berechnung der Finite-Differenzen ist) wird folgende Gleichung geschrieben:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3} \cdot \Psi(i-1, j-2) + \frac{\beta_5}{k^4} \cdot \Psi(i, j-2) - \frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3} \cdot \Psi(i+1, j-2) + \\
 & + \frac{\beta_2}{4 \cdot h^3 \cdot k} \cdot \Psi(i-2, j-1) - \left(\frac{\beta_2}{2 \cdot h^3 \cdot k} - \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3} \right) \cdot \Psi(i-1, j-1) - \\
 & - \left(2 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + 4 \cdot \frac{\beta_5}{k^4} \right) \cdot \Psi(i, j-1) + \left(\frac{\beta_2}{2 \cdot h^3 \cdot k} + \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3} \right) \cdot \Psi(i+1, j-1) - \\
 & - \frac{\beta_2}{4 \cdot h^3 \cdot k} \cdot \Psi(i+2, j-1) + \frac{\beta_1}{h^4} \cdot \Psi(i-2, j) - \left(4 \cdot \frac{\beta_1}{h^4} + 2 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} \right) \cdot \Psi(i-1, j) + \\
 & + \left(6 \cdot \frac{\beta_1}{h^4} + 4 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + 6 \cdot \frac{\beta_5}{k^4} \right) \cdot \Psi(i, j) - \left(4 \cdot \frac{\beta_1}{h^4} + 2 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} \right) \cdot \Psi(i+1, j) + \\
 & + \frac{\beta_1}{h^4} \cdot \Psi(i+2, j) - \frac{\beta_2}{4 \cdot h^3 \cdot k} \cdot \Psi(i-2, j+1) + \\
 & + \left(\frac{\beta_2}{2 \cdot h^3 \cdot k} + \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3} \right) \cdot \Psi(i-1, j+1) - \left(2 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + 4 \cdot \frac{\beta_5}{k^4} \right) \cdot \Psi(i, j+1) - \\
 & - \left(\frac{\beta_2}{2 \cdot h^3 \cdot k} - \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3} \right) \cdot \Psi(i+1, j+1) + \frac{\beta_2}{4 \cdot h^3 \cdot k} \cdot \Psi(i+2, j+1) - \\
 & - \frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3} \cdot f(i-1, j+2) + \frac{\beta_5}{k^4} \cdot \Psi(i, j+2) + \frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3} \cdot \Psi(i, j+2) = -f_y(i, j).
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

	$-2 \cdot h$	$-h$	0	h	$2 \cdot h$
$2 \cdot k$		$-\frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3}$	$\frac{\beta_1}{k^4}$	$\frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3}$	
k	$-\frac{\beta_2}{4 \cdot h^2 \cdot k}$	$\frac{\beta_2}{2 \cdot h^2 \cdot k} + \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3}$	$-2 \cdot \frac{\beta_2}{h^2 \cdot k^2} - 4 \cdot \frac{\beta_1}{k^4}$	$-\frac{\beta_2}{2 \cdot h^2 \cdot k} + \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} - \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3}$	$\frac{\beta_2}{4 \cdot h^2 \cdot k}$
0	$\frac{\beta_1}{h^4}$	$-4 \cdot \frac{\beta_1}{h^4} - 2 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2}$	$6 \cdot \frac{\beta_1}{h^4} + 4 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + 6 \cdot \frac{\beta_2}{k^4}$	$-4 \cdot \frac{\beta_1}{h^4} - 2 \cdot \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2}$	$\frac{\beta_1}{h^4}$
$-k$	$\frac{\beta_2}{4 \cdot h^2 \cdot k}$	$-\frac{\beta_2}{2 \cdot h^2 \cdot k} + \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} - \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3}$	$-2 \cdot \frac{\beta_2}{h^2 \cdot k^2} - 4 \cdot \frac{\beta_1}{k^4}$	$\frac{\beta_2}{2 \cdot h^2 \cdot k} + \frac{\beta_3}{h^2 \cdot k^2} + \frac{\beta_4}{2 \cdot h \cdot k^3}$	$-\frac{\beta_2}{4 \cdot h^2 \cdot k}$
$-2 \cdot k$		$\frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3}$	$\frac{\beta_1}{k^4}$	$-\frac{\beta_4}{4 \cdot h \cdot k^3}$	

Abbildung Nr. 1 - Die Annäherung durch die Finite-Differenzen der Gleichung (14).

An jedem Punkt des Netzwerks von Finite-Differenzen wird so eine Gleichung geschrieben. In diese Gleichungen erscheinen die Werte der Ψ Funktion, Werte gültig in die benachbarten Punkte, d. h. es erstellt sich ein Gleichungssystem.

Die neue erstellte Gleichungssystem zu lösen ist es möglich nur durch festlegen der Konturbedingungen. Für die Punkte der sich auf der Kontur befinden ist es nicht möglich die Molekülberechnung aus der Abbildung Nr. 1 anzuwenden. Hier wird für jede Richtung entweder der Wert der Belastung oder der Wert der Spannung vorgeschrieben. Dieses Schema wird auch für die Punkte verwendet, die mit dem Konturpunkten benachbart sind. Als Folge, unsere Gleichungen werden auch solche Punkte beinhalten, die nicht des untersuchten Feldes gehören. Wenn wir die Molekülberechnung nur für die Punkte verwenden, die innerhalb des Feldes sind, diese werden ein zweites, fiktives Konturen bilden, parallel mit der ersten realen Kontur. Zu bemerken ist, dass die Punkte von den Rändern des Netzwerkes, die sich diagonal gegenüberliegend mit dem konvexen Ecken liegen, diese hören nicht zu der fiktiven Kontur. (Abbildung Nr. 2)

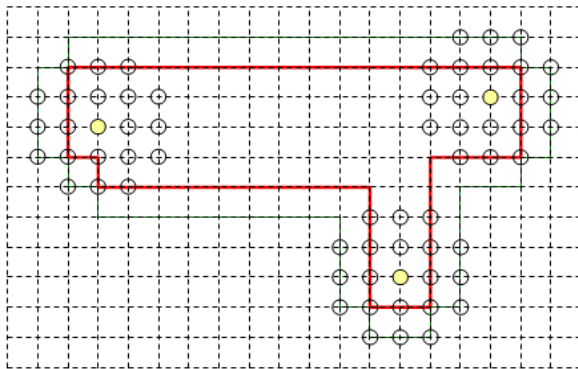


Abbildung Nr. 2 – Das fiktive Kontur erschienen dank der Annäherung durch Finite-Differenzen

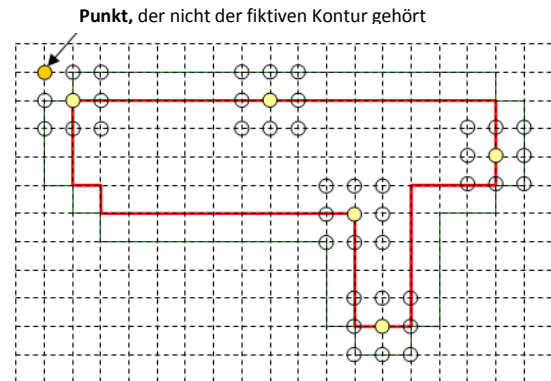


Abbildung Nr. 3 – Die Annäherung von u und v mit zentrierte Differenzen

3. Randbedingungen in Form von vorgeschriebenen Verschiebungen

Für eine einfachere Anwendung der Verfahren, wir werden die reale Kontur durch eine andere Kontur annähern. Dieses Kontur besteht aus horizontale und vertikale Linien, angepasst an die Netzwerk. In diesem Fall, die Randbedingungen werden durch die Projektionen der beiden Koordinatenachsen bestimmt (die Normalrichtung und Tangentialrichtung stimmen mit die Richtungen der Achsen überein).

Die Randbedingungen aus die Verschiebungen bestanden sich aus die vorgeschriebenen Werte der Projektionen von u und/oder v . Laut der Beziehungen (6), die Projektionen der Verschiebungen werden durch die Ableitung der Funktion Ψ bekommen. Wenn wir der Wert von u (6) durch zentrierte Differenzen ausdrücken, wir kommen zu der Molekülberechnung aus der Abbildung Nr. 4 und zu der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k} \cdot \Psi(i-1, j-1) + \frac{\alpha_3}{k^2} \cdot \Psi(i, j-1) - \frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k} \cdot \Psi(i+1, j-1) + \\ & + \frac{\alpha_1}{h^2} \cdot \Psi(i-1, j) - \left(2 \cdot \frac{\alpha_1}{h^2} + 2 \cdot \frac{\alpha_3}{k^2} \right) \cdot \Psi(i, j) + \frac{\alpha_1}{h^2} \cdot \Psi(i+1, j) - \\ & - \frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k} \cdot \Psi(i-1, j+1) + \frac{\alpha_3}{k^2} \cdot \Psi(i, j+1) + \frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k} \cdot \Psi(i+1, j+1) = u(i, j). \end{aligned} \quad (17)$$

Für v erhalten wir derselbe Schema und Formel, nur die Index der α muss sich an jede Position mit 3 erhöht werden.

	$-h$	0	h
k	$-\frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k}$	$\frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k}$
0	$\frac{\alpha_1}{h^2}$	$-2 \cdot \frac{\alpha_1}{h^2} - 2 \cdot \frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_1}{h^2}$
$-k$	$\frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k}$	$\frac{\alpha_2}{k^2}$	$-\frac{\alpha_2}{4 \cdot h \cdot k}$

Abbildung Nr. 4 - Die Annäherung von u mit zentrierten Differenzen

Wir stellen folgendes fest: wenn wir die Molekülberechnung für eine der Knoten aus der Netzwerk anwenden, Knoten der sich auf dem Kontur befindet, diese wird sich auf drei Punkte unterstützen der sich auf die fiktive Kontur befinden. Die konkaven Ecken stellen kein Problem dar, stattdessen, in Falle der konvexen Ecken, dasselbe Schema würde ein Punkt einschließen, der nicht zu der fiktiven Kontur gehört (Abbildung Nr. 3).

In diesem Fall, stattdessen der Annäherung durch zentrierte Differenzen, die Annäherungen der Derivate werden durch die Vorwärtsdifferenzen und Rückwärtsdifferenzen gemacht, abhängig von der Position derjenige Ecke (Abbildung Nr. 5).

	$-h$	0	h	$-h$	0	h
k	X	$\frac{\alpha_2}{k^2}$			$\frac{\alpha_2}{k^2}$	X
0	$\frac{\alpha_1}{h^2}$	$-2 \cdot \frac{\alpha_1}{h^2} - \frac{\alpha_2}{h \cdot k} - 2 \cdot \frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_1}{h^2} + \frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$\frac{\alpha_1}{h^2} - \frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$-2 \cdot \frac{\alpha_1}{h^2} + \frac{\alpha_2}{h \cdot k} - 2 \cdot \frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_1}{h^2}$
$-k$		$\frac{\alpha_2}{h \cdot k} + \frac{\alpha_2}{k^2}$	$-\frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$\frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$-\frac{\alpha_2}{h \cdot k} + \frac{\alpha_2}{k^2}$	
k		$-\frac{\alpha_2}{h \cdot k} + \frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$-\frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$\frac{\alpha_2}{h \cdot k} + \frac{\alpha_2}{k^2}$	
0	$\frac{\alpha_1}{h^2}$	$-2 \cdot \frac{\alpha_1}{h^2} + \frac{\alpha_2}{h \cdot k} - 2 \cdot \frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_1}{h^2} - \frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$\frac{\alpha_1}{h^2} + \frac{\alpha_2}{h \cdot k}$	$-2 \cdot \frac{\alpha_1}{h^2} - \frac{\alpha_2}{h \cdot k} - 2 \cdot \frac{\alpha_2}{k^2}$	$\frac{\alpha_1}{h^2}$
$-k$	X	$\frac{\alpha_2}{k^2}$			$\frac{\alpha_2}{k^2}$	X

Abbildung Nr. 5 – Die Annäherung der u Bewegung in die konvexen Ecken

Die verteilte Last, der die Kontur beladet, wird durch seine Projektionen Richtung x und y bestimmt und wird durch p_x und p_y markiert. In der Regel, diese Last wird

durch einer willkürlichen Funktion beschrieben. Während des Eingriffs, diese Funktion wird durch eine Schrittfunktion ersetzt.

Wenn wir ein Punkt nehmen der sich auf dem Kontur befindet und rundum dieses Punkt ein Element der Fläche ausschneiden, die Spannungen entlang der Kontur müssen im Gleichgewicht mit die Außenlasten sein. So ist es möglich einige Verhältnisse zu schreiben, durch den die Projektionen der Außenlast die Spannungen entlang der Kontur ausgleichen. Mit Hilfe der Spannungen, ausgedrückt durch die Ableitungen der Ψ Funktion und nachdem diese Ableitungen mit Finite-Differenzen transkribiert wurden, können letztendlich die Randbedingungen neu geschrieben werden.

4. Bestimmung und Lösung der Gleichungssystem

Die Aufgabe ist die Lösung der Differentialgleichung (14) während die Randbedingungen erfüllt sind. Die Struktur wird durch Diskretisierung mit einem Netzwerkknoten (Punkte) ersetzt. Diese wird für die Bestimmung der Finite-Differenzen benötigt. Der realen Kontur aus der durch Diskretisierung studiertes Feld, wird mit eine unterbrochene (durch vertikale und horizontale Segmenten) Linie ersetzt. Jede Seitenpunkt aus dem Netzwerk wird einen anderen Punkt einführen, Punkt der sich außerhalb der Domain befinden. Diese Punkte bilden eine fiktive Kontur, der parallel mit der realen Kontur ist. Dem konvexen Ecken gehören zwei Punkte von der fiktive Kontur, dem konkaven Ecken lediglich keine.

Wir nehmen an, das die studierte Feld homogen ist und umfasst eine Reihe von b Punkte, eine Reihe von e Punkte von die Seiten, eine Reihe von konvexe s Ecken und eine Reihe von konkave k Ecken. Als folge, die Zahl der Punkte aus der fiktive Kontur ist $f = e + 2 \cdot s$ und das Feld wird vollflächig mit $p = b + 2 \cdot e + 3 \cdot s + k$ Punkte abgedeckt.

Die Bewegungen in diesem Feld werden durch die $\Psi(x, y)$ Funktion gegeben. Die Werte dieser Funktion in die jeweiligen Netzwerkpunkte werden durch die Finite-Differenzen-Methode berechnet. Insgesamt sind es ein Nummer von p Punkte, d.h. ein Nummer von p Gleichungen, wie folgend beschrieben: (a) eine Anzahl von b Gleichungen, die wir in die inneren Punkte schreiben, nach dem Schema aus der Abbildung Nr. 1. In Abwesenheit der Volumenkräfte, der freie Element wird gleich mit Null sein; (b) eine Anzahl von $2 \cdot e$ Gleichungen den wir für die Seiten schreiben, entsprechend dieser Seiten gültige Randbedingungen; (c) eine Anzahl von $3 \cdot s$ Gleichungen den wir für die konvexe

Ecken schreiben; (d) eine Anzahl von k Gleichungen den wir für die konkave Ecken schreiben.

Durch diese Prozedur, wir erhalten ein System linearer Gleichungen wo die Unbekannte eigentlich der Wert der Ψ Funktion in die Netzwerkpunkte ist. Die Zahl der Unbekannten ist gleich mit den geschriebenen Gleichungen und somit mit der Zahl der Netzwerkpunkte (einschließlich die Punkte von der fiktiven Kontur).

5. Schlussfolgerungen

In diese wissenschaftliche Arbeit, mit Hilfe der Finite-Differenzen, wurde eine Berechnungsmethode vorgestellt für die Integration der Differentialgleichungen durch partielle Ableitungen. Diese partiellen Ableitungen beschreiben die Flächen-Zustand Verschiebung oder Spannung der anisotropen Materialien. So wie in diesem Arbeit gezeigt wurde, es ist möglich die ebene Aufgabe durch Spannungen zu formulieren, was zu die Airy'schen Spannungsfunktion führt, dessen partielle Ableitungen zweiter Ordnung, der Feld der Spannungen beschreibt. Mit Hilfe der Spannungen und der Materialgleichungen wird es möglich sein die spezifische Verformungen zu bestimmen. Der Nachteil dieser Methode ist die Unmöglichkeit eines direkten Ausdrucks der Verschiebungen.

Durch eine Analogie mit die Airy'schen Funktion wurde eine "Potentialfunktion" der Verschiebung verwendet, der die Festlegung der gemischten Randbedingungen ermöglicht hat. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion zeigen die Verschiebungen in die Richtung der Koordinatenachsen. Die Derivaten der Verschiebungen, also die Derivaten höherer Ordnung der Verschiebungsfunktion, geben uns die spezifische Verformungen und durch die Verwendung der Materialgleichungen, diese Derivaten höherer Ordnung führen uns zu die Spannungsfeld. Als Folge, uns wird es möglich sein die Festlegung der Randbedingungen in Form von vorgeschriebenen Spannungen unter eine direkte Beziehung zwischen die Verschiebungen und Spannungen. Diese Beziehungen werden durch Finite-Differenzen approximiert.

In die verfahren der Approximieren mit Finite-Differenzen, die reale Kontur wird durch eine Kontur ersetzt der sich aus horizontale und vertikale gerade Linien besteht. Weiterhin, die Randbedingungen in Form von vorgeschriebene Belastung haben uns zu einige Äquivalenzrelationen zwischen die Belastungen und Spannungen geführt. Je dichter der Feld ist, umso genauer wird die Gestaltung der Belastungen und die Approximierungen in den Punkten der Ecken werden einen geringeren negativen Effekt haben.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Ahmed, S. R., and M. Z. Hossain, and M. W. Eddin.** „A general mathematical formulation for finite-difference solution of mixed-boundary-value problems of anisotropic materials.“ *Computer and Structures*, 83 (2005): 35-51.
2. **Curtu, Ioan, and Nicolae Ghelmeziu.** Mecanica lemnului și materialelor pe bază de lemn. București: Editura Tehnică, 1984.
3. **Gálfi, Botond, and András Kakucs, and Katalin Harangus, and Ioan Száva.** „Testing device for wood-based materials' mechanical behaviours evaluation.“ *Analele Universitatii "Dunarea de Jos" din Galati*, Fascicola XIV (2008): 131-134.
4. **Gálfi, Botond, and Ioan Száva, and András Kakucs, and Katalin Harangus.** „Experimental investigation combined with analytical calculus for orthotropic materials mechanical behaviors evaluation.“ *Ovidius University Annals of Mechanical, Industrial and Maritime Engineering*, 10 (2010): 187.
5. **Kakucs, András.** Végeselem módszer a szerkezetek számításában. Brașov: Editura Transilvania, 2007.
6. **Kakucs, András.** A véges-elem módszer alapjai. Cluj-Napoca: Editura Scientia, 2007.
7. **Mazilu, Popa, and Nicolae Țopa, and Mircea Ieremia.** Teoria și calculul plăcilor ortotrope. București: Editura Tehnică, 1983.